

DETERMINAREA NELINIARITATILOR UNUI SISTEM MECANIC DIN MASURATORI DINAMICE INDIRECTE

Ghiorghe CAUTES, Gheorghe OPROESCU, Catalin Stefan CAUTES

Dunarea de Jos University of Galati, E-mail cautes.gheorghe@ugal.ro

Keywords: Elastically systems, non-linearity, determinations, indirect measurements

Many oscillating mechanical systems have nonlinear elastically characteristics and, because their large dimensions, cannot support easy a measurement of the elastic characteristic after a long period of exploitation; it is made by dismounting it, a measurement at normal standards, a quite complicated operation. In this paper it is calculated the cause (non-linear elastic element) and the evaluation of the effect (the form of the stabilized oscillation) in interdependence with the other data, like the mass and the coefficient of the viscid abrasion

Multe sisteme oscilante mecanice nu pot fi supuse unor analize amanuntite, în ceea ce privește evaluarea caracteristicii elastice, mai ales după perioade lungi de exploatare. Fabricantul de elemente elastice face acest lucru în mod obligatoriu și furnizează elementul elastic împreună cu caracteristica sa. O măsurare a caracteristicii elastice după trecerea unui lung timp de exploatare, deci după o perioadă de îmbatrânire, presupune demontarea lui și măsurarea pe standuri specializate, operație destul de complicată. Să ne imaginăm elementele elastice ale unor utilaje foarte grele precum mașini de construcții, locomotive, vagoane feroviare, ciururi vibratoare, suspensia unor construcții și multe altele.

Ar fi foarte util dacă, fundamentat teoretic, se poate imagina un mijloc de a determina caracteristica de elasticitate a unui element elastic direct pe utilajul pe care este montat, efectuând măsurări indirecte dar suficient de precise și edificatoare.

La excitații cu pulsații de valoare coborâtă faza elongației este aceeași cu faza excitației, sau foarte apropiată. În ecuația diferențială a unui oscilator neliniar excitat armonic

$$m \cdot \ddot{x} + F_f + F_e = F \cdot \sin \omega \cdot t \quad (1)$$

din punct de vedere experimental este posibil să cunoaștem următoarele date:

-masa elementului mobil, m ;

-forța perturbatoare $F \cdot \sin(\omega \cdot t)$,

amplitudinea F , pulsația ω . Aceasta din

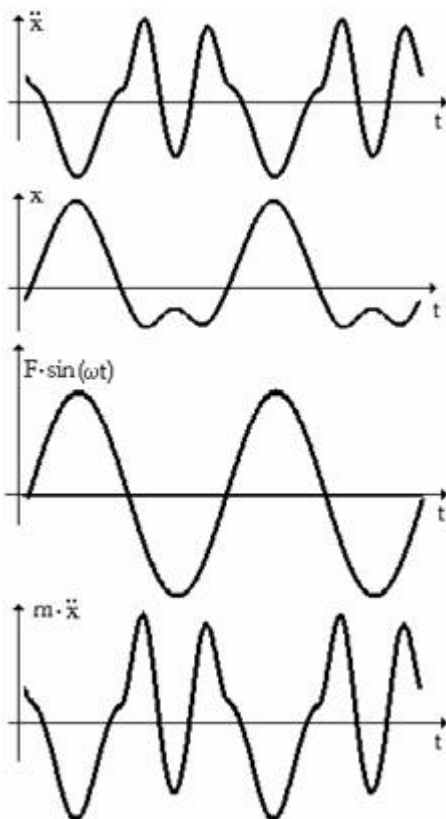


Fig. 1. Elementele de evaluare indirectă a caracteristicii elastice

urma poate fi produsa de un simplu generator de forta unidirectionala, chiar portabil, care se ataseaza rigid de masa mobila;

-acceleratia $\ddot{x}$ ca functie de timp masurata cu un traductor inertial si preluata pe un sistem numeric (de preferat un calculator cu placa de achizitie date).

Din (1) se poate scrie

$$F_f + F_e = F \cdot \sin w \cdot t - m \cdot \ddot{x} \quad (2)$$

În fig. 1 se observa ca este posibila efectuarea diferentei care reprezinta termenul drept din (2), în urma careia rezulta o functie de timp a sumei fortelor disipative si elastice. Neexistând defazaj între excitatie si elongatie se poate elimina timpul dintre cele doua legi numerice obtinute, respectiv legea fortelor $F_f + F_e$ si legea spatiului x , aflându-se astfel legea fortelor $F_f + F_e$ ca functie de deplasare, a carei reprezentare grafica este chiar bucla histerezis [1]. Aflând mai departe ecuatiile liniei de simetrie a buclei histerezis se afla de fapt ecuatiile caracteristicii elastice a elementului elastic[2].

Fie un oscilator mecanic cu caracteristica elastica neliniara ale cărei valori concrete sunt:

- ✓ masa $m=1$ [kg];
- ✓ excitatia $F=1000\sin(100t)$ [N];
- ✓ amortizarea $h=800$ [Ns/m];
- ✓ caracteristica elementului elastic data de relatia (3);

$$F_e = \begin{cases} [2 \cdot 10^9 \cdot |x^2| + 3 \cdot 10^6 \cdot |x|] \cdot \text{sign}(x) & \text{pentru } x \geq 0 \\ [2 \cdot 10^{10} \cdot |x^2| + 8 \cdot 10^6 \cdot |x|] \cdot \text{sign}(x) & \text{pentru } x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ecuatia diferentiala a miscarii a fost integrata numeric, metoda Runge-Kutta de ordinul IV, valorile rezultate pentru deplasarea x si acceleratia $\ddot{x}$ fiind retinute ca valori experimentale preluate de un sistem de achizitie de date. Datele determinate corespund unui regim de miscare stabilizata, dupa trecerea a 50 de perioade ale excitatiei din momentul demararii algoritmului de integrare numerica. Mai departe, din momentul în care s-au retinut valorile deplasarii si acceleratiei ca functii numerice de timp, s-a facut abstractie de faptul ca oscilatorul are caracteristicile mecanice cunoscute.

Se determina in continuare valorile fortelor disipative si elastice însumate, la momentele la care erau cunoscute valorile pentru acceleratie si forta de excitatie. Cu datele astfel obtinute se traseaza bucla histerezis si se interpoleaza linia medie care ar trebui sa conduca la expresia fortei elastice.

Prelucrând astfel datele s-au obtinut rezultatele din fig. 2.

Interpolarea liniei medii a histerezisului s-a facut separat pentru domeniile de valori pozitive si negative ale elongatiei x adoptând drept functie de interpolare un polinom de gradul doi cu coeficientii necunoscuti, $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Determinarea coeficientilor s-a facut prin metoda abaterii patratic medii minime, $\sum (a \cdot x^2 + b \cdot x + c - F_e)^2 \rightarrow \min$ si rezolvând sistemul lui Gauss.

Comparând valorile din fig. 2. cu valorile de la care s-a plecat, (3), se remarca faptul ca erorile sunt mult mai mici decât 0,1%.

Marind amortizarea din exemplul de mai sus la valori supracritice, $h=5000$ Ns/m, rezultatele sunt la fel de precise si se vad în figura 3.

Se impune precizarea ca determinarea caracteristicii elastice prin metoda descrisa mai sus trebuie facuta cu sistemul excitat cu o pulsatie suficient de coborâta în raport cu pulsatia proprie. O astfel de excitatie are avantajul ca, producând oscilatii de frecventa joasa, acestea nu vor genera unde în volumul corpului cercetat. Motivarea consta în aceea ca apar unde în volum daca lungimea de unda este mai mica decât de patru ori dimensiunile minime ale corpului. Undele din volum pot introduce defazari suplimentare între excitatie si deplasare la locul masurarii.

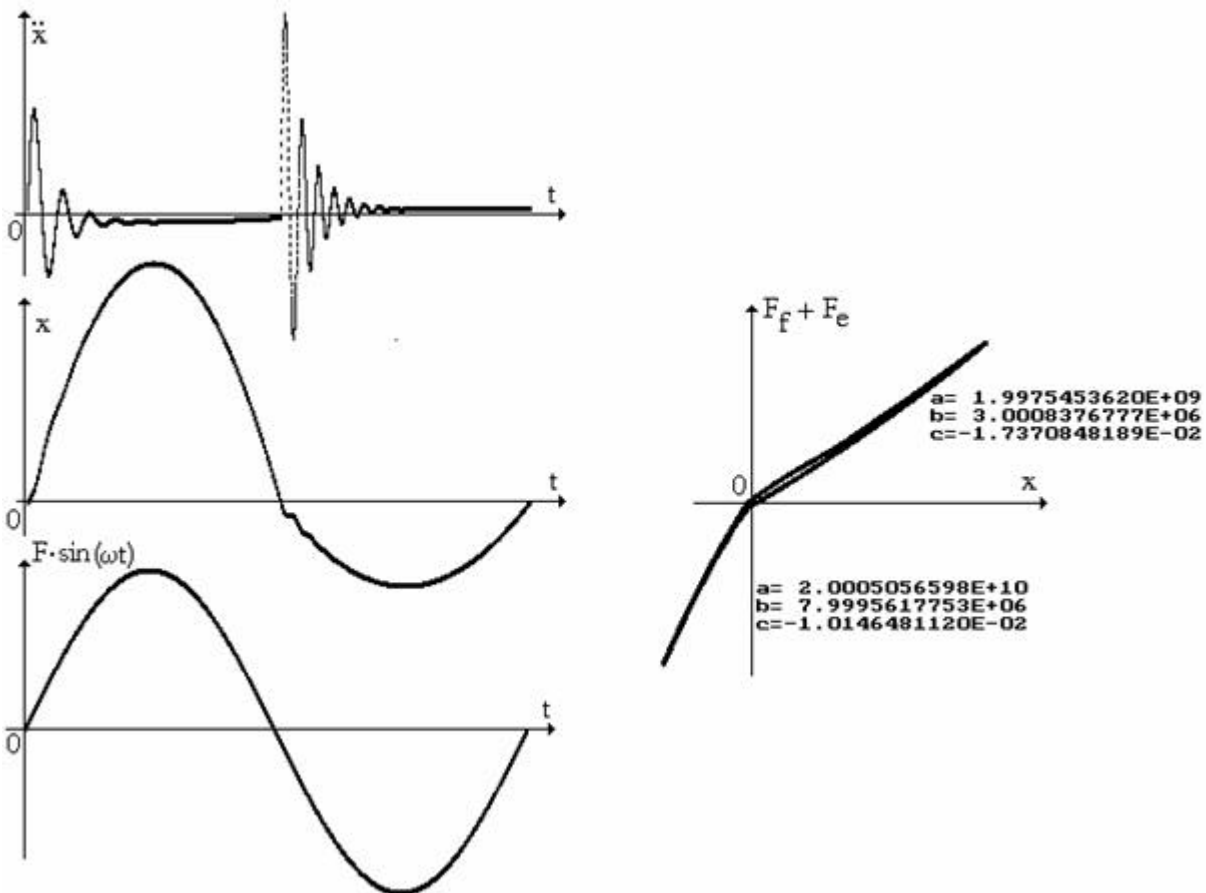


Fig. 2.. Identificarea caracteristicii elementului elastic pe cale numeric`

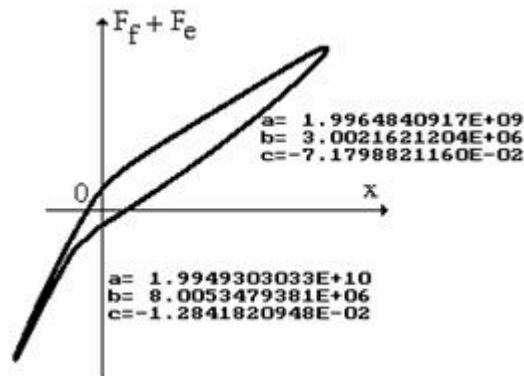


Fig. 3. Identificarea caracteristicii de elasticitate, amortizarea supracritic

Indiferent natura elementului elastic se poate măsura caracteristica elastică a acestuia fără a-l mai demonta de pe utilaj, lucru extrem de dificil pentru utilaje mari sau amplasate în locuri greu accesibile pentru un atelier mecanic. Acest lucru este deosebit de important la urmărirea comportării în timp a efectului de îmbatrânire a elementelor elastice. Un calculator programat să efectueze calculele descrise mai sus și echipat cu o placă de achiziții de date rezolvă foarte comod problema.

Am precizat că pulsația excitatorului trebuie să fie foarte mică în raport cu pulsația proprie. Dar a determina pulsația proprie pentru un oscilator mecanic cu caracteristica elastică neliniară, este o operație dificilă. Pe cale analitică nu se poate stabili o valoare a pulsației proprii precum la oscilatoarele liniare. Determinarea valorii pulsației la care se face excitarea nu necesită însă o mare precizie în evaluare, ea trebuie să fie de câteva zeci de ori mai mică decât pulsația proprie, în cazul oscilatoarelor neliniare mai mică decât cea mai mică pulsație proprie. O estimare a pulsației proprii se poate face măsurând pulsația oscilațiilor libere în urma unei excitații printr-un impuls dat sistemului mecanic, cel mai adesea prin lovirea cu un corp de masă mare. Dacă oscilatoarele au mase mari, pulsația proprie este destul de coborâtă, făcând dificilă realizarea practică a experimentului descris mai sus. Pentru acestea este mai comod să se recurgă la o excitație în domeniul postrezonant, dar trebuie să se țină cont de defazarea cu π radiani între deplasarea determinată experimental și excitație, care trebuie să se masoare concomitent (sincron) atât deplasarea cât și faza excitatorului.

Evaluarea neliniarităților prin spectrul de armonici al oscilației rezultate și stabilizate, determinat cu ajutorul coeficienților seriei Fourier, nu aduce informații precise asupra cauzei și nici nu oferă o valoare, o măsură cantitativă, care să caracterizeze gradul de neliniaritate.

Se propune evaluarea gradului de neliniaritate, respectiv al efectului său, prin două analize distincte, astfel

- a) - comparație între caracteristica reală și o caracteristică liniară echivalentă pe același domeniu efectiv de deplasări ale masei m ;

- comparatie între forma oscilației reale și o oscilație sinusoidală echivalentă în

regim stabilizat (după amortizarea componentei libere).

b) evaluarea cauzei (neliniaritatea elementului elastic) cât și evaluarea efectului (forma oscilației stabilizate) în interdependența de celelalte mărimi precum masa și coeficientul de frecare vâscoasă.

Având o caracteristică elastică de forma $F_e = F_e(x)$ aceasta se liniarizează pe domeniul de lucru calculând parametrii m și n ai unei drepte astfel încât aceasta să fie dreapta statistică cea mai precisă, adică să aibă abaterea medie pătratică S minimă față de caracteristica reală pe domeniul de valori efective ale elongației $x \in [x_1, x_2]$, respectiv

$$S = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} (F_{e(x)} - m \cdot x - n)^2 \cdot dx} / (x_2 - x_1) \rightarrow \min \quad (4)$$

care conduce la sistemul de ecuații

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial n} = 0 \quad (5)$$

de unde se află parametrii m și n rezolvând un sistem de două ecuații liniare.

În regim stabilizat oscilația are forma $x = x(t)$ care se compară pe durata unei perioade sau pe n perioade, n întreg sau real, cu sinusoida de forma $x = A_0 + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ unde parametrii A_0 , A și φ se află din aceeași condiție a abaterii medii pătratice minime, respectiv din

$$S = \sqrt{\int_{t_1}^{t_1+T} (x(t) - A_0 - A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi))^2 \cdot dt} / (n \cdot T) \rightarrow \min \quad (6)$$

cu t_1 = un moment oarecare în domeniul de timp cu oscilațiile stabilizate, $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$.

Deoarece efectuând derivatele parțiale ale funcției S din (6) în raport cu parametrii A_0 , A și φ se obține un sistem foarte greu de rezolvat, se află parametrii A_0 , A și φ direct din condiția de minim, iterativ, prin metoda gradientului. Fie A_0^n, A^n, φ^n valorile parametrilor la iteratia de ordinul n . O valoare mai precisă, la iteratia succesivă de ordinul $n+1$, se obține din egalitățile următoare

$$A_0^{n+1} = A_0^n - \delta \frac{\frac{\partial S}{\partial A_0^n}}{|\text{grad}(S)|}; \quad A^{n+1} = A^n - \delta \frac{\frac{\partial S}{\partial A^n}}{|\text{grad}(S)|}; \quad \varphi^{n+1} = \varphi^n - \delta \frac{\frac{\partial S}{\partial \varphi^n}}{|\text{grad}(S)|} \quad (7)$$

unde δ este un deplasament ce poate fi facut oricât de mic iar $|\text{grad}(S)|$ este modulul gradientului abaterii S , respectiv

$$|\text{grad}(S)| = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial A_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial A}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2} \quad (8)$$

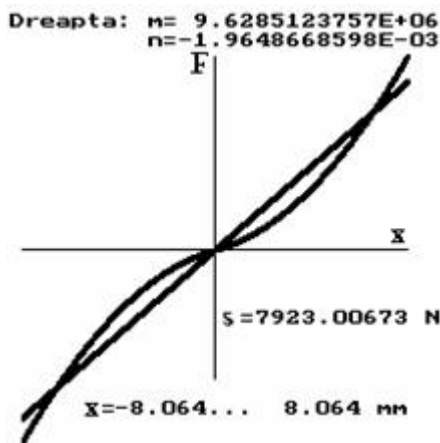


Fig. 4 Caracteristic` neliniar` simetric`

Comparând caracteristicile elastice si oscilatiile reale cu formele liniare respectiv sinusoidale cele mai probabile, nepotivirea dintre ele se propune ca o masura a neliniaritatii ce se determina prin calcularea si compararea abaterilor medii patratic pe domeniul de valori al elongatiei, respectiv pe o perioada.

Ca exemplu am ales un caz concret pentru a fi analizat, în care $m=100\text{Kg}$, $h=2000\text{Ns/m}$, $F_0=50000\text{N}$, $\omega=157\text{rad/s}$, F_e =forța elastica de diferite forme si expresii precum în cele ce urmeaza. Parametrii m si n au fost determinati exact, dintr-un sistem linear de ecuatii, iar parametrii A_0 , A si φ prin iteratii pâna la o eroare maxima de 0,1% pentru fiecare variabila.

Pentru început se face o evaluare pentru caracteristici elastice simetrice.

În fig. 4 se prezinta caracteristica neliniara simetrica cu expresia

$$F_e = (3 \cdot 10^6 \cdot |x| + 10^9 \cdot |x^2|) \cdot \text{sign}(x), \quad x < > 0$$

pe domeniul de valori ale elongatiei x corespunzatoare oscilatiilor efective în regim stabilizat, dreapta cea mai probabila si abaterea medie patratic conform celor descrise în modelul teoretic de mai sus. Corespunzator acestui caz concret, oscilatia

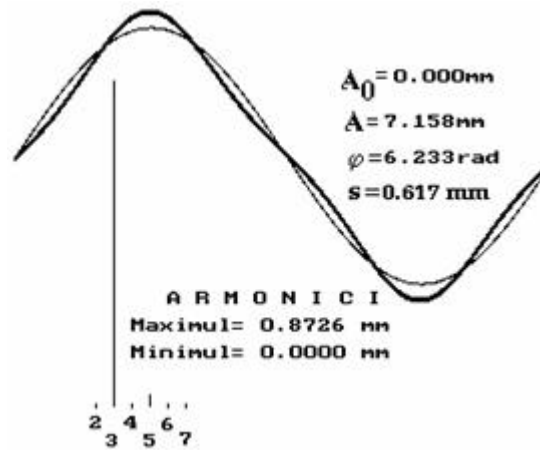


Fig. 5 Oscilație cu abateri simetrice

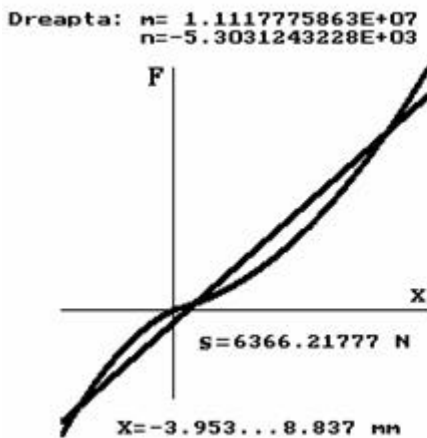


Fig. 6. Caracteristica neliniara asimetrica

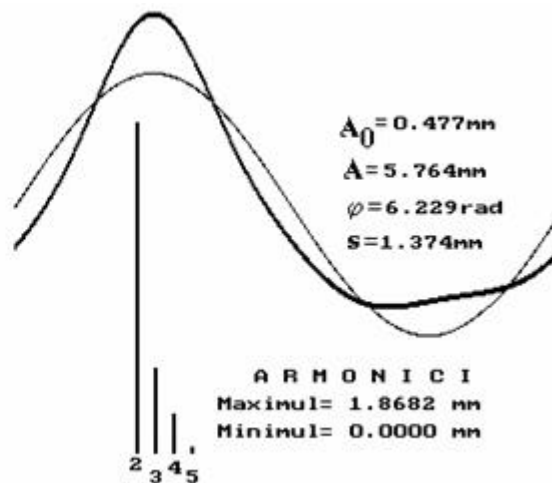


Fig. 7. Oscilație cu abateri asimetrice

stabilizata are forma prezentata în fig. 5 ca functie a elongatiei dependenta de timp pe o perioada a miscarii, unde se compara cu sinusoida cea mai probabila determinata conform (6). Oscilatia reala fiind nesinusoidala va produce armonici a caror amplitudine si faza s-au calculat dezvoltând în serie Fourier oscilatia rezultata dupa stabilizare, spectrul lor fiind redat în aceeași figura. Se remarca clar faptul ca, existând o caracteristica elastica neliniara simetrica, se produc oscilatii nesinusoidale cu abateri simetrice fata de o sinusoida echivalenta iar spectrul de armonici contine numai armonicile impare.

Analizam în continuare un alt caz, dar în care forta elastica este asimetrica

$$F_e = \begin{cases} 3 \cdot 10^6 \cdot x + 10^9 \cdot x^2, & x \geq 0 \\ -1 \cdot (6 \cdot 10^6 \cdot |x| + 2 \cdot 10^9 \cdot |x|^2), & x < 0 \end{cases}$$

Graficul caracteristicii elastice pe domeniul de valori ale elongatiei se prezinta în fig. 6, împreună cu dreapta cea mai probabila si abaterea medie patratica. Datorita asimetriei fortelor elastice în raport cu originea elongatiile extreme pozitive si negative nu mai sunt egale în modul. Nici oscilatia rezultata dupa stabilizare nu mai prezinta abateri simetrice, fig. 7, spectrul de frecvente continând atât armonici pare cât si armonici impare. Pentru a avea o imagine cât mai clara a modului de evaluare a neliniaritatilor dintr-un oscilator atât în ceea ce priveste caracteristica elastica (evaluarea cauzei) cât si în ceea ce priveste forma oscilatiei (evaluarea efectului) am ales în exemplul urmator o caracteristica elastica liniara pe domeniul pozitiv de valori ale elongatiei si neliniara pe domeniul de valori negative ale acesteia, conform expresiei

$$F_e = \begin{cases} 3 \cdot 10^6 \cdot x, & x \geq 0 \\ -1 \cdot (6 \cdot 10^6 \cdot |x| + 2 \cdot 10^9 \cdot |x|^2), & x < 0 \end{cases}$$

Figura 8 prezinta caracteristica elastica, unde se vad destul de clar atât marea diferenta între fortele elastice pe domeniile pozitive si negative de valori ale elongatiei, cât si valoarea destul de mare a abaterii medii patraticice dintre caracteristica reala si dreapta cea mai probabila. Faptul ca deplasarea totala de la valoarea extrema negativa la valoarea extrema pozitiva a elongatiei este mai mare decât în cazul anterior se datoreaza posibilitatii de deformare mare pe domeniul pozitiv de deplasari a urmare a unei caracteristici elastice slabe, permitând acumularea de energie mai mare sub efectul excitației, ceea ce permite o deformare mai mare si pe domeniul negativ de valori.

Forma oscilatiei prezentata în fig. 9 confirma deosebirile mult mai mari în raport cu sinusoida cea mai probabila, cu care se compara. Se remarca durata mai mare a miscarii pe domeniul de valori pozitive ale elongatiei si o alura apropiata de un salt cu deplasare mare si durata mica în domeniul de

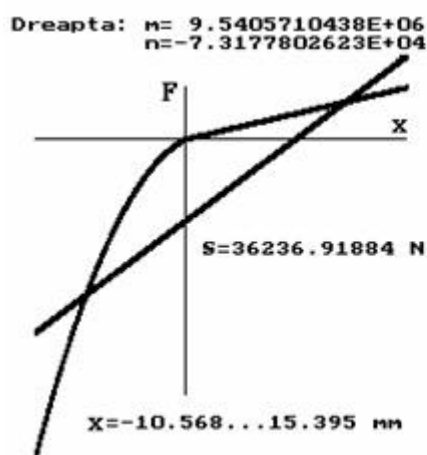


Fig. 8. Caracteristică puternic asimetrică

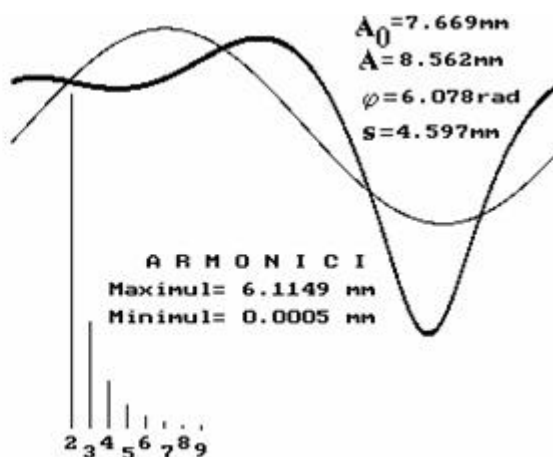


Fig 9. Oscilații cu abateri puternic asimetrice

valori negative. Spectrul armonicilor si valorile amplitudinii acestora confirma puternica desimetrizare.

Putem concluziona ca evaluarea neliniaritatii prin procedeul propus caracterizeaza, dupa cum este ilustrat în exemplele prezentate, atât neliniaritatea cauzei cât si neliniaritatea efectului unei oscilatii neliniare. Evaluarea neliniaritatii se face prin unitati de masura naturale, aceleasi cu ale functiei neliniare, respectiv forta pentru caracteristica elastica, spatiu pentru oscilatie. Valorile calculate sunt într-o relatie de proportionalitate cu neliniaritatile efective ilustrate grafic.

Bibliografie

- [1s Cautes Gh, Oproescu Gh, Nastac S. Oscillators Hysterezis and Elastic Unlinearity. 3^d International Conference of PhD Students, ISBN 963 661 480 6, ISBN 963 661 482 2, pg. 47-50 University of Miskolc, Hungary, 13-19 August 2001.
- [2s Cautes Gh, Oproescu Gh, Ghelase D. – Evaluarea cantitativa a neliniaritatilor elastice ale oscilatoarelor mecanice. Buletinul Stiintific a celei de a XXVI – a Conferinte Nationale de Mecanica Solidelor, Sectiunea Vibratii si propagari de unde, Braila, 2002
- [3s Oproescu Gh, Cautes Gh. - Modelarea fortelor interne la oscilatoarele mecanice. ISSN 1583-0713 Volumul I anul I, pg. 121-126, Analele Universitatii din Oradea, Inginerie manageriala si tehnologica, 2002.